11 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Упростите выражение:

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Решение. Так как $9+4\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}+5=(2+\sqrt{5})^2$, то

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=-2.$$

2. Докажите, что если углы треугольника ABC связаны равенством

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right),$$

то треугольник прямоугольный.

Решение.

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)\Rightarrow 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

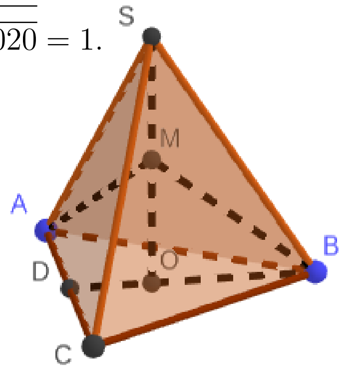
Так как A и B — углы треугольника, то $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\neq 0.$

Значит $\sin\left(\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, т.е. $\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{\pi}{4}=0$. Следовательно, $\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\angle C=\dfrac{\pi}{2}$.

Критерии. *2 балла* - выполнено преобразование, приведённое в 1-ой строке авторского решения; при этом задача не решена; *6 баллов* — задача решена, но не объяснено, почему $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\neq 0$.

3. Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2019-2\sqrt{x-2020}}+\sqrt{x-2016-4\sqrt{x-2020}}=1.$$



Решение. Сделаем замену $\sqrt{x-2020}=t$, $t\geq 0$. Тогда $x=t^2+2020$. Имеем $\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-4t+4}=1$, т.е. $|t-1|+|t-2|=1$. Откуда получаем $1\leq t\leq 2$. Значит, $x\in[2021;2024]$.

Критерии. 2 балла — исходное уравнение упрощено путём введения новой переменной (либо был выделен полный квадрат); при этом задача не решена.

4. В правильном тетраэдре середина высоты соединена отрезками с вершинами основания. Докажите, что эти отрезки взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть a длина ребра правильного тетраэдра $SABC$. Тогда $OB=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, а из треугольника SOB, где $\angle O=90^\circ$, следует, что $SO=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Пусть M — середина SO. Из $\triangle OMB$ получим:

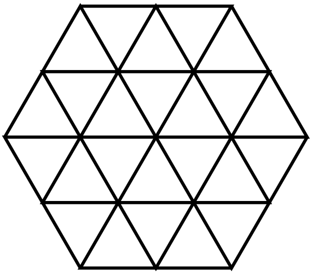
$$MB^2=MO^2+OB^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{a^2}{2}.$$

В треугольнике AMB:

$$MB^2+MA^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2=AB^2,$$

следовательно, $\angle AMB=90^\circ$, т.е. $AM\perp BM$.

Критерии. *2 балла* — найдена высота тетраэдра; при этом задача не решена; *3 балла* — найдено MB; при этом задача не решена.



5. Есть правильный шестиугольник со стороной 2, разлинованный на равносторонние треугольники со стороной 1. Петя и Вася ходят по очереди. В свой ход игрок разрезает фигурку на две части по прямой линии сетки, одну часть выкидывает, а другую передает сопернику. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первый ходит Петя. Кто победит в игре?

Решение. Заметим, что в любой момент у полученной фигуры углы равны либо $60°$, либо $120°$. Вася победит, если будет придерживаться следующей стратегии: ***если у фигуры есть острый угол, отломить единичный равносторонний треугольник и отдать его сопернику, иначе разрезать фигуру по линии симметричной предыдущей линии разреза относительно центра фигуры, имевшейся на руках соперника непосредственно перед его ходом. Следуя этой стратегии, второй игрок всегда будет иметь ход, а потому не проиграет.*** Поскольку кто-то должен проиграть, то это будет Петя.

Критерии. *4 балла* - описана верная стратегия, но при этом не объяснено, кто победитель.