10 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Упростите выражение $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$. Если результат упрощения — целое число, то прибавьте к результату 6, а если результат нецелый, то прибавьте $4\sqrt{3}$.

Решение. $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}=-6$. Ответ: 0.

2. Докажите неравенство: $\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{2x^2+2}}\geq 2$.

Решение. $\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{2x^2+2}}=\dfrac{2x^2+2}{\sqrt{2x^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}=\sqrt{2x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}$.

Так как для любого положительного a верно неравенство $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, мы получаем требуемое.

3. В треугольнике ABC угол $C=120^\circ$, $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Найдите угол B.

Решение. По теореме косинусов: $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=AC^2+BC^2+AC\cdot BC$. По теореме синусов: $\sin B=\dfrac{AC\cdot\sin 120^\circ}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}AC}{2AB}$, т.е. $\sin^2 B=\dfrac{3AC^2}{4AB^2}$.

Значит, $\sin^2 B = \dfrac{3AC^2}{4AC^2 + 4BC^2 + 4AC \cdot BC} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \frac{BC}{AC}}$. Из условия находим $\sin^2 B = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $\sin B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle B = 45^\circ$.

Критерии. *3 балла* — использованы теорема косинусов или теорема синусов, но задача не решена.

4. На урок рисования пришли 30 детей и принесли 52 карандаша 7 различных цветов. Каждый принес хотя бы один карандаш. Докажите, что у двоих детей наборы цветов карандашей совпадают.

Решение. Пусть x детей принесли по одному карандашу, тогда $30-x$ детей принесли хотя бы по два. Тогда общее количество карандашей не меньше $x+2(30-x) = 60-x$; значит, $52 \geq 60-x$, или $x \geq 8$. Значит, хотя бы 8 детей принесли по одному карандашу, тогда два из этих карандашей будут одного цвета.

Критерии. *3 балла* — найдено число детей, принесших по одному карандашу, но задача не решена.

5. При каких a система $\begin{cases} 4x - [x] = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases}$ имеет решение? Найдите такие x. (Здесь $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x - [x]$. Например, $[4{,}7] = 4$, $[-2{,}7] = -3$, $\{4{,}7\} = 4{,}7 - 4 = 0{,}7$, $\{-2{,}7\} = -2{,}7 + 3 = 0,3$.)

Решение.

$$\begin{cases} 4x - [x] = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4[x] + 3\{x\} = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases} \Rightarrow [x] = a + 2.$$

Последнее равенство значит, что $a \in \mathbb{Z}$. После подстановки получим $\{x\} = -\dfrac{a}{3} - 2$. Так как $0 \leq \{x\} < 1$, то $0 \leq -\dfrac{a}{3} - 2 < 1$, откуда $-9 < a \leq -6$. Значит, $a \in \{-6; -7; -8\}$. Найдем x.

1) $a = -6$. Тогда $[x] = -4$ и $\{x\} = 0$. Т.е. $x = -4$.

2) $a = -7$. Тогда $[x] = -5$ и $\{x\} = \dfrac{1}{3}$. Т.е. $x = -4\dfrac{2}{3}$.

3) $a = -8$. Тогда $[x] = -6$ и $\{x\} = \dfrac{2}{3}$. Т.е. $x = -5\dfrac{1}{3}$.

Критерии. *3 балла* — доказано, что a целое; при этом задача не решена; *5 баллов* — верно найдено множество возможных значений a; при этом задача не решена.